数理解析研究所講究録
第 1739 巻 2011 年 21-36

高木貞治の書籍についてのいくつかの注意

真島　秀行（お茶の水女子大学）(Majima, Hideyuki(Ochanomizu University))

1　はじめに

高木貞治先生が 1960 年 2 月 28 日に物故されてから 50 年になるのを記念し，様々な行事を行うことを筆者は関係方面に提案し、日本数学会は 2009 年 2 月 28 日から 2010 年 2 月 28 日を高木貞治 50 年祭記念年として一連の行事（日本数学会の WEBPAGE 参照　http://mathsoc.jp/meeting/takagi50/、例えば日本数学会高木貞治 50 年祭記念市民講演会など)、数学セミナーの特集などが既にあった。研究集会「数学史の研究」については、2009 年の秋に 2010 年には「高木デー」を設けることが決まっていた。研究代表者の高瀬正仁先生に講演題候補を二つ上げたところ、高木先生に関連する方の講演をするようにとの要請があった。そこで筆者が読み知っており、“教養の数学”として 20 数年前から「微分積分学」や「線形代数」で講義する範囲にある「実数論」と「行列式」を扱うことにした。

2　実数論が含まれる高木の書籍について

- 新撰算術、 博文館〈帝国百科全書〉(1898)
- 新式算術講義、 、博文館、初版（1904)
- 数の概念、岩波書店、初版（1949)、改版（1970)
- 数学雑談、共立社書店〈輓近高等数学講座　第 1 巻〉、初版（1935)、共立出版〈共立全書〉、第 2 版（1970)
- 解析概論、岩波講座数学（1933)；解析概論：微分積分法及初等函數論、岩波書店、初版（1938)、増訂版（1943)、改訂第三版（1961)

算術、『数の概念』等の本については、足立先生の 2009 年 8 月の講演、「高木貞治の数の基礎に関する三部作」、2010 年 2 月の高木貞治 50 年祭記念市民講演会における講演「高木貞治先生に見る数学思想の変遷」があり、ここでは『解析概論』についてのみ触れる.

筆者が高校 2 年生の頃から所有する『解析概論』は改訂第三版（1961)（その 1969 年 5 月 30 日発行の第 10 刷）であるが、実数の公理の同値性について、欠落があること、「実数の同値な公理を述べるときに、アルキメデスの公理と併せて述べなくてはならないところを書き忘れているところがあること」を、約 40 年前、大学 1 年生のときの杉浦光夫先生の「解析学」の講義で教えていただいた.（改訂第 3 版（1961）の１１pの図を参照のこと.）

『解析概論』は初め、岩波講座数学のひとつとして 1933 年に分冊で発行され、その後、単行本『解析概論：微分積分法及初等函數論』として同書店から 1938 年に初版が刊行された．このときから、実数の連続性の同値条件の話題が図も含めて入っている．その後、増訂版（1943)、（１２pに図)、改訂第三版（1961)、（１１pに図）に引き継がれた．筆者の講演中に**一松信先生からコメント**をいただいたが、「1955 年当時、東大教養学部で非常勤講師をしていたが、その欠落のあることについて三村征雄先生から注意を受けた。杉浦光夫

先生たちも当然知っていた」とのことである．その後、直したのではないかとのコメントもあったが、1986年出版の軽装版も改訂第三版（1961）と同じで、**2010 年 9 月 15 日の新版でもそのまま**とすることが岩波書店では決定しているとのことであった．

実数論をあまり教えなくなったが、以前から数学者でも“この欠落”を知らないのに驚くことが何度かあった．筆者は 20 数年来、「実数」を教える際には、現代的な実数体の認識を示してきたが、長年おこなっている実数の扱い方は、以下のようなである．一橋大学での講義をお茶の水女子大学に異動するときに一橋論叢に書いたものをさらに改良したものである。すべてを掲載するのも余計なので、適当に略して次節にそれを記すことにしよう．なお、さらにコメントを頂いたので、記録しておく。

足立先生注意　正弦関数の極限のところが循環論法になっている、それは修正されないか。（これについては、「これは孤長の定義（後述, §40）からの当然の帰結であるが、通常次のように説明する。」とあり、また、三角函数を積分から導く議論が§53 にあって、円との対応も付けてあるので、注意深く読めば循環論法は回避されている、と考えられるようになっている。）

佐々木力先生注意　アルキメデスの原理は数学史ではエウクレイデスの原理というそうである。

実数について，筆者の「数の歴史」講義ノートからの紹介は引用文献 [3] を参照していただくことにし略する．

3　行列式が含まれる高木の書籍について

行列式について書いてある高木の本は次の通りである。

- 新撰代数学（博文館、1898）
- Theory of determinants (東京大学講義ノート、1919)
- 行列式（不明、講義の刊行物、年期も不明）
- 代数学講義（共立社、初版、1930）、(共立出版、改訂版、1948)、(共立出版、改訂新版、1965)

「新撰代数学（博文館)」には Weber 等からとったらしいことが序文にあるだけで引用文献はとくにない。ヤコービーの記号などの言及がある。“Determinant”には、引用文献はなく、歴史的注意もない。「行列式（不明、講義)」には「ライプニッツの１６７８年の書簡」という文献不明の引用があり、和算に関しても言及する次のような歴史的注意がある。

『行列式』の歴史的注意:

「連立一次方程式などは、簡単であるが、解法の過程は複雑である．その複雑を簡明なる規律の下に整理することを得たれば、行列式の発見者及び行列式論をもり立てたところの特異人の賜物である．

西洋の数学史では、行列式はライプニッツ（Leibnitz）の書簡（1678）中に記載されているのを嚆矢とする．書簡は後年に至って発見されたのであって、一次方程式の解法が一般に知ら渡ったのは、クラーメル（Cramer）の代数曲線論（1750）以後である（§9 参照）．行列式論の発達に最も著しい貢献をした数学者の中では古い所でコーシー（Cauchy、1789 − 1857）やヤコービー（Jacobi、1804 − 1851）ケーレー（Cayley、1821 − 1895）などが著名である．

本邦でも、和算家が一次方程式を自由に解き得たようであるが、行列式論の完成にまで発展するには至らなかったのである。」

現在も出版され続けている「代数学講義（共立)」でも「ライプニッツの１６７８年の書簡」という引用はるがその文献は不明で、次のような歴史的注意がある．和算に関する言及はなくなっている．

『代数学講義』の歴史的注意:

行列式の起源は連立一次方程式の一般的な解法にある．西洋の数学史では、行列式はLeibnizの書簡（1678）中の記載を初出とするが、その書簡は後年に発見されたのである．その後Cramerが曲線論に関する著書（1750）において任意数の未知数を含める一次方程式の解法を示してから．ようやく学界の注意をひき起こし、後にはCauchy（1815)、Jacobi（1841）に至って、現今の行列式論の基礎ができたのである

問題点1「ライプニッツ（Leibnitz）の書簡（1678）中に記載されているのを嚆矢とする.」とあるが、ライプニッツ（Leibnitz）のde l’Hosptalへの書簡は1693年ではなかったか。（林鶴一、藤原松三郎にはそう書いてあった。）

ライプニッツ（Leibnitz）の草稿としては、1678年の次のものがある。「誤謬が避けられ、数列が容易に見出される、新しい解析の実例」（ライプニッツ全集2）… 私は文字のかわりに数字を用いる．…（ライプニッツ全集3、林知宏「ライプニッツ」も参照）

この「ライプニッツ（Leibnitz）の書簡（1678)」は謎である。

問題点2「本邦でも、和算家が一次方程式を自由に解き得たようであるが、行列式論の完成にまで発展するには至らなかったのである.」と言われるが、高木先生は和算の歴史についてどれほど知っておられたか。また、なぜ、『代数学講義』を出版した時点では和算に関する言及を削除したのか。

関の200年祭（1907 − 1908）のときに高木は東京数学物理学会でいろいろな役をしており知っているはずではないか。しかしながら、林鶴一が解伏題之法についての論文を書いたのは1910年であるので『行列式』の講義をし、ノートに纏めた時点では、知らなかったかもしれない。しかし、後に藤原松三郎が和算について調べたことから高木もそれを知ったのではないか、という公田蔵先生らの推測がある。

講演者は20数年来、線形代数の行列式、連立一次方程式の解法の導入部分を教える際は、3次行列式を自然に定義し、性質も自然に分かるようにしている。その方法を次節に示すがまさに関孝和の行列式を定めるときの方法と考えられる。

次々節の「関孝和の行列式について」にみるように、関孝和の「解伏題之法」において行列式が実質定められている。それを読めば、逐式交乗でもとめて表としてまとめるとき消す項の若い順に書き、隣同士が交級（次数を偶順列で換え）斜乗でかけて得られることがわかり、逐式交乗で帰納的に定まるが煩雑になるので交式と交式斜乗で代える、と宣言し、残念ながら5次以上については後者の方では誤ったことを書いてしまったのである。

4　行列式の導入について (筆者の「線形代数」の講義ノートから)

筆者の「線形代数」の講義ノートから，連立線形方程式の一般解法の計算を考えることから自然に導入されるのを見るため，2元2連立線形方程式の解を求める計算，2次行列式は既知として，3元3連立線形方程式の解を求める計算を見直す部分をみてみよう．

4.1　3元3連立線形方程式の解法

2元2連立線形方程式の解法と同様の計算で，3元3連立線形方程式の解の計算をしてみよう．うまく計算することによって，3次行列式をどう定めるべきか，どのような性質をもつかがよく観察できる．

次の3元3連立線形方程式を考える．

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 & \dots(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 & \dots(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 & \dots(3) \end{cases}$$

(2) と (3) から y または z を消去して次の式を得る．

$(2)\times b_3+(3)\times(-b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} k_2 & b_2 \\ k_3 & b_3 \end{vmatrix} \ldots (4)$$

$(2)\times c_3+(3)\times(-c_2)$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} k_2 & c_2 \\ k_3 & c_3 \end{vmatrix} \ldots (5)$$

これらと (1) を使えば，y も z も消去した式を得る．

$(1)\times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (5)\times(-b_1) + (4)\times c_1$

$$\left\{ a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right\} x = \left\{ k_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} k_2 & c_2 \\ k_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} k_2 & b_2 \\ k_3 & b_3 \end{vmatrix} \right\}$$

これは結局，$(1)\times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (2)\times\left(-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) + (3)\times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$，に他ならず

$$\begin{aligned} &\left\{ a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} x \\ &+ \left\{ b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} y \\ &+ \left\{ c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} z \\ &= \left\{ k_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

であるから，次のことが分かる．

$$\begin{aligned} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= 0 \\ c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

(1)(2)(3) の代わりに，(2)(1)(3) として上の計算をすれば，添字の 1 と 2 を交換した結果が出てくる．
(3)(2)(1), (1)(3)(2) 等として計算すれば，各々添字を 1 と 3 の交換，2 と 3 の交換とした結果がでるから

$$\begin{aligned} & a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ = & -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \quad a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

同様に，y のみの方程式を導く過程から，a と b を交換して得られる式

$$-b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= \quad a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$c_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

が出る．また，z のみの方程式を導く過程から，a と c とを交換して得られる式

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= \quad c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

を得る．以上から

$$
\begin{aligned}
& a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} && \text{（第 1 列に関する展開）} \\
= \quad & -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} && \text{（第 2 列に関する展開）} \\
= \quad & c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} && \text{（第 3 列に関する展開）} \\
= \quad & a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} && \text{（第 1 行に関する展開）} \\
= \quad & -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} && \text{（第 2 行に関する展開）} \\
= \quad & a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} && \text{（第 3 行に関する展開）}
\end{aligned}
$$

ということが分かり，これはもう少し計算すれば，

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

に等しく，これをもって３次正方行列

$$\begin{bmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{bmatrix}$$

の行列式と定義し，

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \det \begin{bmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{bmatrix}$$

で表すことにすれば．上の計算から次のことも分かる．

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

すなわち，行列を３つの列ベクトルの並んだものと思うと，２つの列ベクトルが同じであれば，行列式は０になる．行列式を用いれば，

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

のとき，(1)(2)(3) の解を次のように表せることになる．これを Cramer の公式という．

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1, & b_1, & c_1 \\ k_2, & b_2, & c_2 \\ k_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & k_1, & c_1 \\ a_2, & k_2, & c_2 \\ a_3, & k_3, & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & k_1 \\ a_2, & b_2, & k_2 \\ a_3, & b_3, & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}}$$

4.2　３次行列の行列式

３次正方行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

は前節で見たように以下のすべてのものに等しい．

- $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$
- $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ （第１列に関する展開）
- $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ （第１行に関する展開）
- $-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ （第２列に関する展開）
- $-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ （第２行に関する展開）

- $c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ （第３列に関する展開）

- $a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ （第３行に関する展開）

また，２つの列または行を入れ替えると符号が変わる．

（列１） $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

（行１） $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

この性質を交代性という．これから２つの列または行に同じ成分がある行列の行列式は０であることがわかる．

行列式の成分表示式から次のことも容易にわかる．

（列２） $$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 & c_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & c_2 \\ a_3 & \lambda b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

（行２） $$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & \lambda b_3 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

（列３） $$\left\{\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2+b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3+b_3' & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3' & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2+c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3+c_3' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3' \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

（行３） $$\left\{\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2+b_2' & c_2+c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3' & b_3+b_3' & c_3+c_3' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

この性質を多重線形性という．

(0) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ は直接計算して確かめられる．逆に，３次（実）正方行列の全体の集合 $M(3,\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}$ への関数（写像）F があって，(０)（列１）（列２）（列３）又は（０）（行１）（行２）（行３）をみたすものは行列式に限ることが示される．もう少し詳しくいうと（列１）（列２）（列３）又は（行１）（行２）（行３）をみたす３次（実）正方行列の全体の集合 $M(3,\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}$ への関数（写像）は

$$F\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となり，(０）もみたせば

$$F\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる．

5　関孝和の行列式について

日本が誇る江戸時代の数学者（和算家）関（新助）孝和は，「解伏題之法」（天和癸亥重陽日重訂）の写本の中で今日我々が行列式と呼ぶものを論じている．天和三年九月九日で西暦 1683 年にそれ以前に書かれていた原稿の二度目の改訂稿として書かれたことである．これは行列式について世界的にみても最も早い論考である．記号としては漢字（十干　甲乙丙丁戊己庚辛壬癸，十二支　子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥，二十八宿　角亢?房心尾箕斗牛女虚危室壁奎婁胃昴畢觜参井鬼柳星張翼軫　など）を使って記述している．

二つ以上の未知数に関する連立高次代数方程式から，一つの未知数を消去してその他の未知数に関する高次代数方程式（従って最終的には一つの未知数の高次代数方程式）を得るアルゴリズム（計算手順）として導入している．１次式２つの場合，２次式３つの場合，３次式４つの場合について，逐一計算（逐式交乗）した後，次のように述べて「交式斜乗」の形で述べている．

「右各逐式交乗而得正剋也　雖然相乗数位繁多而不易見　故以交式斜乗代之（右各逐式交乗して正剋を得る也．然りと雖も相乗の数，位繁多にして見易からず．故に交式斜乗を以って之に代える)」

ここでは，添え字を使った今日我々が習う西洋流の記号に翻訳して説明する．講演者が二十数年ほど前から線形代数の講義で行列式を教えるときに使っている３元３連立線形方程式をうまく解く方法では（割り算をしなくてよく）自然に３次の行列式とその性質を導くことができるが，それを多元高次方程式の場合に適用した方法で説明する．それがまさに関孝和の逐式交乗の方法と考えられる．

２次行列式　$x_{11} + x_{12}y = 0,\ x_{21} + x_{22}y = 0$ から y を消去して得られる左辺の式で，１つの正符号の右斜乗と１つの負符号の左斜乗の和となる．

$$\det{}_2\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +x_{11}x_{22} \\ -x_{21}x_{12} \end{array}$$

これだけのことであるが，次数が高くなったときの説明のために敢えて，式に番号を振り，計算すれば０と

なる項も書いた式を与えておく．次の y に関する 2 連立 1 次方程式を考える．

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}y=0 \ \ldots(1) \\ x_{21}+x_{22}y=0 \ \ldots(2) \end{cases}$$

(1) と (2) から y を消去するため，$(1)\times x_{22}+(2)\times(-x_{12})$ を計算して次式を得る．

$$(+x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12})+(+x_{12}x_{22}-x_{22}x_{12})y \quad = \quad 0$$

これは，1 と y の係数だけ取り出して書けば，第一列の余因子を掛けて次の式を得たことになる．

$$[x_{22}\ \ -x_{12}]\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12} & +x_{12}x_{22}-x_{22}x_{12} \end{bmatrix}$$

3 次行列式　逐式交乗を説明するため，次の y に関する 3 連立 2 次方程式を考える．

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}y+x_{13}y^2=0 \ \ldots(1) \\ x_{21}+x_{22}y+x_{23}y^2=0 \ \ldots(2) \\ x_{31}+x_{32}y+x_{33}y^2=0 \ \ldots(3) \end{cases}$$

(2) と (3) から y を消去するため，$(2)\times x_{32}+(3)\times(-x_{22})$ を計算して次式を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}y^2=0 \ \ldots(4) \qquad \begin{vmatrix} x_{22} & x_{21} \\ x_{32} & x_{31} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}y^2=0 \ \ldots(4)'$$

(2) と (3) から y^2 を消去するため，$(2)\times x_{33}+(3)\times(-x_{23})$ を計算して次式を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}y=0 \ \ldots(5)$$

これらと (1) を使い，$(1)\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}+(5)\times(-x_{12})+(4)\times x_{13}$ を計算すると y も y^2 も消去した

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}-x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix}+x_{13}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}=0$$

という式（第一行の展開式）を得る．2 次行列式で表したところを展開しておくと，

$$(+x_{11}x_{22}x_{33}-x_{11}x_{32}x_{23})+(+x_{31}x_{12}x_{23}-x_{21}x_{12}x_{33})+(+x_{21}x_{32}x_{13}-x_{31}x_{22}x_{13})=0$$

であるが，これは結局，(1), (2), (3) の式から直接計算したと考えると

$(1)\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}+[(2)\times x_{33}+(3)\times(-x_{23})]\times(-x_{12})+[(2)\times x_{32}+(3)\times(-x_{22})]\times x_{13}$,

すなわち，

$(1)\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}+(2)\times[x_{33}(-x_{12})+x_{32}x_{13}]+(3)\times[(-x_{23})(-x_{12})]+(-x_{22})x_{13}]$

という計算であり，2 次行列式を展開した表し方では，

$$(+x_{11}x_{22}x_{33}-x_{11}x_{32}x_{23})+(+x_{21}x_{32}x_{13}-x_{21}x_{12}x_{33})+(+x_{31}x_{12}x_{23}-x_{31}x_{22}x_{13})=0$$

であり，2 次行列式を使って次式（第一列の展開式）とも一致することが分かる．

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{21}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix} + x_{31}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{21}\left(-\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}\right) + x_{31}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} = 0$$

また，これらの式の左辺は，3 つの正符号の右下がり斜乗と 3 つの負符号の左下がり斜乗の和となる．

$$\mathrm{det}_3\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = +x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23} \\ -x_{11}x_{32}x_{23} - x_{21}x_{12}x_{33} - x_{31}x_{22}x_{13}$$

日本の線形代数の教科書ではサラスの方法というが，関の方法，一歩譲っても，関 - サラスの方法と呼ぶべきである．なお，計算の結果として 0 となる項も敢えて書くなら，第一列の余因子を左から係数行列に掛けて得られるベクトルを係数とする $1, y, y^2$ についての式で次のようになる．

$$\begin{aligned} &+\{x_{11}\times[x_{22}x_{33}-x_{32}x_{23}]+x_{21}\times[(-x_{12})x_{33}+x_{32}x_{13}]+x_{31}\times[(-x_{12})(-x_{23})+(-x_{22})x_{13}]\} \\ &+\{x_{12}\times[x_{22}x_{33}-x_{32}x_{23}]+x_{22}\times[(-x_{12})x_{33}+x_{32}x_{13}]+x_{32}\times[(-x_{12})(-x_{23})+(-x_{22})x_{13}]\}y \\ &+\{x_{13}\times[x_{22}x_{33}-x_{32}x_{23}]+x_{23}\times[(-x_{12})x_{33}+x_{32}x_{13}]+x_{33}\times[(-x_{12})(-x_{23})+(-x_{22})x_{13}]\}y^2 = 0 \end{aligned}$$

また，3 次同次の 6 項をそれぞれ，

$$u1 = x_{11}x_{22}x_{33},\quad u2 = x_{21}x_{32}x_{13},\quad u3 = x_{31}x_{12}x_{23}$$
$$d1 = x_{11}x_{32}x_{23},\quad d2 = x_{21}x_{12}x_{33},\quad d3 = x_{31}x_{22}x_{13}$$

と表すとき，6 項の和における表記順は任意であるが上の計算式では，

$$+u1-d1-d2+u3+u2-d3,\quad +u1-d1+u2-d2+u3-d3,\quad +u1+u2+u3-d1-d2-d3$$

になっていることに注目しておく．右斜乗と左斜乗の和として表すやり方はいくつもあるが，そのうちの 3 つが自然に現れている．対角線の右斜乗，左斜乗を順に書いていこうとすれば，

$$+u1-d3+u3-d1+u2-d2,\quad +u1-d3-(+d1-u3)+u2-d2,$$

となることに注意する．

4 次行列式　関の逐式交乗の方法によれば（お茶の水女子大学所蔵の西田明則写本では）4 次行列式は次のようになっている．

$$\mathrm{det}_4\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = U1+U2+U3+D1+D2+D3$$

ここで，$U1, U2, U3$ は上段に順に，$D1, D2, D3$ は下段に順に書かれているそれぞれ 4 項からなる式である．

$$U1 = +x_{11}x_{22}x_{33}x_{44} - x_{21}x_{32}x_{43}x_{14} + x_{31}x_{42}x_{13}x_{24} - x_{41}x_{12}x_{23}x_{34}$$

$$
\begin{aligned}
U2 &= -x_{11}x_{42}x_{33}x_{24} + x_{21}x_{12}x_{43}x_{34} - x_{31}x_{22}x_{13}x_{44} + x_{41}x_{32}x_{23}x_{14} \\
U3 &= -x_{11}x_{22}x_{43}x_{34} + x_{21}x_{32}x_{13}x_{44} - x_{31}x_{42}x_{23}x_{14} + x_{41}x_{12}x_{33}x_{24} \\
D1 &= +x_{11}x_{42}x_{23}x_{34} - x_{21}x_{12}x_{33}x_{44} + x_{31}x_{22}x_{43}x_{14} - x_{41}x_{32}x_{13}x_{24} \\
D2 &= +x_{11}x_{32}x_{43}x_{24} - x_{21}x_{42}x_{13}x_{34} + x_{31}x_{12}x_{23}x_{44} - x_{41}x_{22}x_{33}x_{14} \\
D3 &= -x_{11}x_{32}x_{23}x_{44} + x_{21}x_{42}x_{33}x_{14} - x_{31}x_{12}x_{43}x_{24} + x_{41}x_{22}x_{13}x_{34}
\end{aligned}
$$

これらを交式斜乗にしたときにどういう項を順にならべることになるかということについては，交式に「換四式」として（順に上から下に並べられた）「一二三四　一三四二　一四二三」と斜乗に正負の記号「生尅」が記された図とがあり，それによれば，

$SD(1234)+SD(1342)+SD(1423)$,　$SD(1234)=U1+U2$,　$SD(1342)=D1+U3$,　$SD(1423)=D2+D3$

と考えられる.（横に 4 項ずつ縦に 6 つのブロックがあり，横の番号を固定して縦に見ると第一行とその余因子による展開になるが、余因子部分で対角線の斜乗が現れる順に書いてあると考えられ，交式と斜乗で表し易い配列に逐式交乗で自然にでてくる配列を変えていると考えられる.）多くの先行研究でいくつかの見解が出されているが講演者の見解を述べる.

この 4 次の逐式交乗を説明するため，次の y に関する 4 連立 3 次方程式を考える.

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}y+x_{13}y^2+x_{14}y^3=0 \quad \ldots(1) \\
x_{21}+x_{22}y+x_{23}y^2+x_{24}y^3=0 \quad \ldots(2) \\
x_{31}+x_{32}y+x_{33}y^2+x_{34}y^3=0 \quad \ldots(3) \\
x_{41}+x_{42}y+x_{43}y^2+x_{44}y^3=0 \quad \ldots(4)
\end{cases}
$$

この 4 式のうち (2),(3),(4) の 3 式から y, y^2, y^3 の項をそれぞれ一つだけ残す式を作ることを考える，すなわち，y について 0 次と 1 次，2 次，3 次のうちの一つだけを残す式を 3 次行列式を考えたときのやり方で考えると（現代風には，0 次項を非同次項と看做して 1 次，2 次，3 次についてクラメールの公式で解いた式で分母にくる 3 次行列式を払った式を考えると）

$$
\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} y = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} x_{22} & x_{21} & x_{24} \\ x_{32} & x_{31} & x_{34} \\ x_{42} & x_{41} & x_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} y^2 = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{21} \\ x_{32} & x_{33} & x_{31} \\ x_{42} & x_{43} & x_{41} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} y^3 = 0
$$

これらの式を導くのに一番上の式の導き方がわかれば，残りの二つの式は，y, y^2, y^3 の順を y^2, y^3, y，あるいは，y^3, y, y^2，と入れ換えて作った式を考えればよい．すなわち，列番号を，2,3,4 を 3,4,2 あるいは，4,2,3 と入れ換えた式を作ればよい.（列の入れ換えによる符号の変化は 2 次行列式，3 次行列式については化順に確立でき）そして，これらの式に順に x_{12}, x_{13}, x_{14} を掛けて (1) の $\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix}=0$ 倍（これは先の 3

次行列式の添字のすべてに 1 ずつ加えて得られる式となるが，それ倍）から引くと，y, y^2, y^3 のすべての項を消去した式が得られる．

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{21} & x_{24} \\ x_{32} & x_{31} & x_{34} \\ x_{42} & x_{41} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{21} \\ x_{32} & x_{33} & x_{31} \\ x_{42} & x_{43} & x_{41} \end{vmatrix} = 0$$

この中の 3 次行列式を第一列で展開しておくと，

$$\begin{aligned}
& x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} \\
& -x_{12}\left(+x_{21}\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{31}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{41}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34} \end{vmatrix}\right) \\
& -x_{13}\left(-x_{21}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{31}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{41}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{32} & x_{34} \end{vmatrix}\right) \\
& -x_{14}\left(+x_{21}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix} - x_{31}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix} + x_{41}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}\right) = 0
\end{aligned}$$

これを x_{21}, x_{31}, x_{41} でくくり直すと，

$$\begin{aligned}
& x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} \\
& -x_{21}\left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix}\right) \\
& +x_{31}\left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix}\right) \\
& -x_{41}\left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{32} & x_{34} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}\right) = 0
\end{aligned}$$

よって，丸括弧内を 3 次行列式に直せば 4 次行列式の第一列に関する展開式になる．

$$x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{21}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{41}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{vmatrix} = 0$$

なお，丸括弧内を展開しておくと次のようになる．

$$\begin{aligned}
& +x_{11}(+x_{22}x_{33}x_{44} - x_{22}x_{43}x_{34} - x_{32}x_{23}x_{44} + x_{32}x_{43}x_{24} + x_{42}x_{23}x_{34} - x_{42}x_{33}x_{24}) \\
& -x_{21}(+x_{12}x_{33}x_{44} - x_{12}x_{43}x_{34} - x_{13}x_{32}x_{44} + x_{13}x_{42}x_{34} + x_{14}x_{32}x_{43} - x_{14}x_{42}x_{33}) \\
& +x_{31}(+x_{12}x_{23}x_{44} - x_{12}x_{43}x_{24} - x_{13}x_{22}x_{44} + x_{13}x_{42}x_{24} + x_{14}x_{22}x_{43} - x_{14}x_{42}x_{23}) \\
& -x_{41}(+x_{12}x_{23}x_{34} - x_{12}x_{33}x_{24} - x_{13}x_{22}x_{34} + x_{13}x_{32}x_{24} + x_{14}x_{22}x_{33} - x_{14}x_{32}x_{23})
\end{aligned}$$

これは，$U1, U3, D3, D2, D1, U2$ にある項が順に出てくるようになっている．ところで，元の式 (2)，(3)，(4) 式からどういう係数を掛けて得た式となっているかという履歴を追って考えれば，(4 次行列式の）第一列に

関する展開に相当する式を得ることになる．これは 3 次行列式でも示したが，y, y^2, y^3 の項を消去する際に結局，(2)，(3)，(4) 式に何かを掛けて (1) の $\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix}$ 倍（これは先の 3 次行列式の添字のすべてに 1 ずつ加えて得られる式となるが，それ倍）から引くと，y, y^2, y^3 のすべての項を消去した式が得られるか最終的な形を見ることにより，(1)，(2)，(3)，(4) の何倍になっているかを書くことで実現される．それは，

$$(1)\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + (2)\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + (3)\times\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + (4)\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{vmatrix}$$

を計算することになり，先に述べた 4 次行列式の第一列の展開式が出てくる．

$$x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{21}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{41}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{vmatrix} = 0$$

あるいは，行ベクトルの並べる順番を 1，2，3，4，の順にして，2，3，4，の次が 3，4，1，でその次が 4，1，2，最後が 1，2，3，とすると，

$$x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{21}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ x_{12} & x_{13} & x_{14} \end{vmatrix} + x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{vmatrix} + x_{41}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{vmatrix} = 0$$

この左辺の 3 次行列式を展開した形の式が元々得られるはずの式であり，3 次行列式を行順に斜乗していくと，$U1, D2, D1; U3, D3, U2$ にある項が順に書かれ，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&+x_{11}(+x_{22}x_{33}x_{44} + x_{32}x_{43}x_{24} + x_{42}x_{23}x_{34}) \\
&+x_{11}(-x_{22}x_{43}x_{34} - x_{32}x_{23}x_{44} - x_{42}x_{33}x_{24}) \\
&-x_{21}(-x_{32}x_{13}x_{44} - x_{42}x_{33}x_{14} - x_{12}x_{43}x_{34}) \\
&-x_{21}(+x_{32}x_{43}x_{14} + x_{42}x_{13}x_{34} + x_{12}x_{33}x_{44}) \\
&+x_{31}(-x_{42}x_{23}x_{14} - x_{12}x_{43}x_{24} - x_{22}x_{13}x_{44}) \\
&+x_{31}(+x_{42}x_{13}x_{24} + x_{12}x_{23}x_{44} + x_{22}x_{43}x_{14}) \\
&-x_{41}(+x_{12}x_{23}x_{34} + x_{22}x_{33}x_{14} + x_{32}x_{13}x_{24}) \\
&-x_{41}(-x_{12}x_{33}x_{24} - x_{22}x_{13}x_{34} - x_{32}x_{23}x_{14})
\end{aligned}$$

なお，上の計算の代わりに 3 次行列式を列順に斜乗していくと，$U1, D1, D2; U3, U2, D3$ にある項が順に書かれることになり，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&+x_{11}(+x_{22}x_{33}x_{44} + x_{42}x_{23}x_{34} + x_{32}x_{43}x_{24}) \\
&+x_{11}(-x_{22}x_{43}x_{34} - x_{42}x_{33}x_{24} - x_{32}x_{23}x_{44}) \\
&-x_{21}(-x_{32}x_{13}x_{44} - x_{12}x_{43}x_{34} - x_{42}x_{33}x_{14}) \\
&-x_{21}(+x_{32}x_{43}x_{14} + x_{12}x_{33}x_{44} + x_{42}x_{13}x_{34}) \\
&+x_{31}(-x_{42}x_{23}x_{14} - x_{22}x_{13}x_{44} - x_{12}x_{43}x_{24}) \\
&+x_{31}(+x_{42}x_{13}x_{24} + x_{22}x_{43}x_{14} + x_{12}x_{23}x_{44})
\end{aligned}$$

$$-x_{41}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{33}x_{14})$$
$$-x_{41}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})$$

これらは，係数行列である 4 次行列にその第一列の余因子を掛けたものを計算したことになっている．

これは，関の逐式交乗の計算式として残されている表 $U1, D1$,（改ページされて）$U2, D2, U3, D3$ と書かれているものとは改ページ後で $D2, U3, U2, D3$ となっており，上を先に 2 ブロック書きその後下に 2 ブロック書いたとしても，$D2$ と $U2$ の上下が入れ替わったものになっている．

表を作成する段階では，消される項に番号を付けて，番号が若い順に相消し合う項が出てくる部分を先に書くという順にしたので，$U1, D1, U2$, $D2$, ;$U3, D3$ となっている，と考えられる。すなわち，第 1 列に第 2 列を代入した式

$$+x_{12}(+\underline{x_{22}x_{33}x_{44}}+x_{42}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{43}x_{24})$$
$$+x_{12}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{44})$$
$$-x_{22}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{14})$$
$$-x_{22}(+x_{32}x_{43}x_{14}+\underline{x_{12}x_{33}x_{44}}+x_{42}x_{13}x_{34})$$
$$+x_{32}(-x_{42}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{24})$$
$$+x_{32}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{23}x_{44})$$
$$-x_{42}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{33}x_{14})$$
$$-x_{42}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})$$

の $x_{12}x_{22}x_{33}x_{44}$ と相消し合う項は $x_{22}x_{12}x_{33}x_{44}$，で，第 1 列に第 3 列を代入した式

$$+x_{13}(+\underline{x_{22}x_{33}x_{44}}+x_{42}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{43}x_{24})$$
$$+x_{13}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{44})$$
$$-x_{23}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{14})$$
$$-x_{23}(+x_{32}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{33}x_{44}+x_{42}x_{13}x_{34})$$
$$+x_{33}(-x_{42}x_{23}x_{14}-\underline{x_{22}x_{13}x_{44}}-x_{12}x_{43}x_{24})$$
$$+x_{33}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{23}x_{44})$$
$$-x_{43}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{33}x_{14})$$
$$-x_{43}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})$$

の $x_{13}x_{22}x_{33}x_{44}$ と相消し合う項は $x_{33}x_{22}x_{13}x_{44}$ で，第 1 列に第 4 列を代入した式

$$+x_{14}(+\underline{x_{22}x_{33}x_{44}}+\overline{x_{42}x_{23}x_{34}}+x_{32}x_{43}x_{24})$$
$$+x_{14}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{44})$$
$$-x_{24}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{14})$$
$$-x_{24}(+x_{32}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{33}x_{44}+x_{42}x_{13}x_{34})$$
$$+x_{34}(-\overline{x_{42}x_{23}x_{14}}-x_{22}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{24})$$
$$+x_{34}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{23}x_{44})$$

$$-x_{44}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+\underline{x_{22}x_{33}x_{14}})$$
$$-x_{44}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})$$

の $x_{14}x_{22}x_{33}x_{44}$ と相消し合う項は $x_{44}x_{22}x_{33}x_{14}$ であり，直前の式に含まれる $x_{14}x_{42}x_{23}x_{34}$ と $x_{34}x_{42}x_{23}x_{14}$ とは相消し合っている．この順に項を消していくように書いていったのが $U1, D1, U2, D2, ; U3, D3$ という順であると考えられる．

関は，4 次行列式までの，これらの逐式交乗の計算式から，正負を適切に与えれば交式斜乗ですべての項が一回ずつ出てくることを確認し,「逐式交乗をとして交式斜乗で代えられる」と述べたと考えられる．

残念ながら，5 次行列式については，関孝和の「解伏題之法」に記録された斜乗に正負の符号を付けて加えるという方法は正しくない．

というのは、交式 12 個中に (12345) と (15432) というように (2345) と (5432) と完全に逆順となるものが 6 組ずつあり、

$$x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix} \quad と \quad x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{25} & x_{24} & x_{23} & x_{22}\\ x_{35} & x_{34} & x_{33} & x_{32}\\ x_{45} & x_{44} & x_{43} & x_{42}\\ x_{55} & x_{54} & x_{53} & x_{52}\end{vmatrix}$$

のように同じ項が現れ（5 次行列式に現れるはずの）120 項の半分しか現れないし，符号を付けて 0 になってしまうか 60 項の 2 倍が現れるだけだからである

12 個の交式を「一二三四五　一三四五二　一四五二三　一五二三四」,「一二四三五　一四三五二　一三五二四　一五二四三」,「一二五三四　一五三四二　一三四二五　一四二五三」と修正することで，これらの斜乗で 120 項が作られ，符号を適切に付け総和することにより 5 次行列式を得られる．

しかし，逐式交乗の方法の考え方は，一つの未知数に関する一次以上の項を連立方程式を用いて消去し，その未知数に関しては 0 次のそれ以外の未知数に関する方程式を得る方法であり，その考え方自体を間違えたわけではない．関孝和に行列式創始者の名を与えることは正当なことである．もし，逐式交乗の式が書かれていたとすれば，次のようになっていたはずである．すなわち，y に関する 5 連立 4 次方程式を考える．

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}y+x_{13}y^2+x_{14}y^3+x_{15}y^4=0 \ \ldots(1)\\ x_{21}+x_{22}y+x_{23}y^2+x_{24}y^3+x_{25}y^4=0 \ \ldots(2)\\ x_{31}+x_{32}y+x_{33}y^2+x_{34}y^3+x_{35}y^4=0 \ \ldots(3)\\ x_{41}+x_{42}y+x_{43}y^2+x_{44}y^3+x_{45}y^4=0 \ \ldots(4)\\ x_{51}+x_{52}y+x_{53}y^2+x_{54}y^3+x_{55}y^4=0 \ \ldots(5)\end{cases}$$

この 5 式のうち (2),(3),(4)，(5) の 4 式から y, y^2, y^3, y^4 の項をそれぞれ一つだけ残す式を作ることを考える，すなわち，y について 0 次と 1 次，2 次，3 次，4 次のうちの一つだけを残す式を 4 次行列式を考えたときのやり方で考え，結局，(1)，(2),(3),(4)，(5) の何倍を加えて足したことになるかを考えると，今日我々が知る 5 次行列式の第一列の展開式が書かれていたはずである．

$$x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix} + x_{21}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix} + x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix}$$
$$+ x_{41}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix} + x_{51}\times\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\end{vmatrix} = 0.$$

なお，本講演を行うに際し，小松彦三郎名誉教授，竹之内脩名誉教授，松本堯生名誉教授らの先行する研究についてご講演等も聞かせていただいたが，逐式交乗の表の成り立ちについては本講演者の着眼点は新しいものと考える.

参考文献

[1] Goto, T. and Komatsu, H.: Determinants, resultants and discriminants in Japan in the seventeenth century and in Europe in eighteenth and nineteenth centuries, *J. Northwest University (Natural Science Edition)*, **33** No.3, pp. 363–367 (2003).

[2] 平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄編:関孝和全集, 大阪教育図書 (1974).

[3] 真島秀行，実数について，一橋論叢，第 104 巻　第 3 号，pp313-333.